فصل ۴

مکمل مشترک دو زیرفضا

فصل اصلی این مقاله اختصاص به یافتن شروطی برای وجود یک مکمل مشترک برای دو زیرفضا از یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارد [۱]. در ذیل تعریف مکمل مشترک برای دو زیر فضا را بیان نموده و در حالت کلی، بسته به «بعد» فضای هیلبرت دو حالت را در نظر می گیریم. توجه کنید که در این بحث، فرض نمی کنیم که فضای هیلبرت مورد نظر ما تفکیک پذیر است یا خیر، زیرا نتایج قضایا برای هر دو حالت برقرار است، مگر اینکه تفکیک پذیری فضا یا خلاف آنرا ذکر کرده باشیم. در سراسر بحث، زیرفضاها را بسته فرض می کنیم. در ابتدا به ذکر مقدمات می پردازیم.

۱.۴ نرم معادل روی فضای هیلبرت

فرض کنید $\mathcal{H}$ فضای ضرب داخلی با ضرب داخلی بصورت $\langle\cdot,\cdot\rangle$ باشد و $\mathcal{A}\in\mathcal{L}_R^+(\mathcal{H})$ عملگری وارونپذیر باشد. تعریف می کنیم

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{A}} := \langle \mathcal{A}f,g\rangle$$

در اینصورت $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ یک ضرب داخلی معادل روی $\mathcal{H}$ تعریف می کند که در آن ضرب طرف راست $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ضرب داخلی اولیه روی $\mathcal{H}$ است. واضح است که ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ همان ضرب اولیه است که اعضاء آن از $\mathcal{H}$ انتخاب می شوند. در واقع $\langle\mathcal{A}f,g\rangle$ که $\mathcal{A}$ عملگر« خودالحاق کراندار وارونپذیر و مثبتی» است، یک «فرم یک و نیم خطی» است و این ضرب داخلی جدید، نرمی القائی خواهد داشت که برابر $\|\mathcal{A}\|$ است. جزئیات بیشتر را می توانید در [۴] قضیهٔ ۴–۳٫۸ ببینید. اکنون عملگر مورد نظرمان را مطرح نموده و شرایط بالا را برای ایجاد ضربی داخلی «جدید» بر روی آن بررسی می کنیم.

فرض کنیم $\mathcal{H}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ جمع متعامد $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ بوده و عملگر دلخواه $G:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ که $\|G\|<۱$ مفروض باشد. اکنون ضرب داخلی ایجاد شده توسط عملگر

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_G=\begin{pmatrix} I & G^* \\ G & I \end{pmatrix} \tag{۱.۴}$$

[۱] در این بخش فضای هیلبرت را با هر دو نماد H و یا $\mathcal{H}$ نشان خواهیم داد.

را روی $\mathcal{H}$ در نظر بگیرید. بایستی بررسی کنیم که $\mathcal{A}_G \in \mathcal{L}_R^+(\mathcal{H})$. برای $\|G\| < 1$ عملگر $\mathcal{A}_G$ مثبت است، زیرا اگر $h \in \mathcal{H}$ بنابراین h بطور یکتا بصورت

$$h = x + y \qquad , x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$$

مشخص می شود. از اینرو خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_G h, h\rangle &= \langle \mathcal{A}_G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle \\
&= \langle \begin{pmatrix} Ix + G^*y \\ Gx + Iy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle \\
&= \langle Ix, x\rangle + \langle G^*y, x\rangle + \langle Ix, y\rangle + \langle G^*y, y\rangle \\
&+ \langle Gx, x\rangle + \langle Iy, x\rangle + \langle Gx, y\rangle + \langle Iy, y\rangle
\end{aligned}$$

حال از آنجا که $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ متعامدند و بعلاوه $Gx \in \mathcal{Y}$ و $G^*y \in \mathcal{X}$، بنابراین تعدادی از عناصر صفر شده و حاصل چنین می شود:

$$\langle \mathcal{A}_G h, h\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle Gx, y\rangle \qquad (4)$$

اما $\|G\| < 1$، و لذا طبق نامساوی

$$-\|x\|\,\|y\| < \langle Gx, y\rangle < \|x\|\,\|y\|$$

مقدار (۴) مثبت خواهد شد. بنابراین $\mathcal{A}_G$ عملگری مثبت است.

برای وارونپذیری $\mathcal{A}_G$ فرض کنید که $\mathcal{A}_G h = 0$ که در آن

$$h = x + y \quad , x \in X, \ y \in Y$$

لذا داریم:

$$Ix + Gy = 0 \qquad , \qquad G^*x + Iy = 0$$

از آنجا که $G^*x = 0 = Gy$ نتیجه می دهد که $x = y = 0$ یا $h = 0$. بنابراین $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_R^+(\mathcal{H})$ و این $\mathcal{A}_G$، ضرب داخلی معادلی را تولید خواهد نمود. در انتها نتیجه می گیریم که نرم ایجاد شده توسط ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$ با نرم اولیه روی $\mathcal{H}$ متناظر شده و دو نرم با هم معادل خواهند بود.

ملاحظه ۱.۱.۴. *بعنوان یک حالت خاص وقتی $G = 0$ آنگاه $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ اعضای $\mathcal{X}$ را به صفر می نگارد، پس $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$ در نرم تولید شده توسط $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_0$ است.*

۲.۴ مکمل مشترک در فضای هیلبرت با بعد متناهی

تعریف ۱.۲.۴. در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با بعد متناهی، زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ مکملند اگر

آ) $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \{0\}$

ب) $\mathcal{X} + \mathcal{Z}$ در $\mathcal{H}$ چگال باشد.

بنابراین در مورد حالت بعد متناهی مسئله براحتی قابل حل است، زیرا در این حالت با در نظر گرفتن یک پایهٔ متناهی، فضای $\mathcal{H}$ تفکیک پذیر و یکریخت با $\mathbb{R}^n$ خواهد شد و از آنجا، اگر $\mathcal{Z}$ مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشد و $\dim Z = k \leq n$، آنگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای یک بعد $n-k$ و لزوماً یکریختند و لذا مکمل مشترکشان در واقع یک فضا بیشتر نخواهد بود.
اگر فرض کنیم $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ و $\mathcal{Z}$ زیرفضاهای فضای متناهی-بعد هیلبرت $\mathcal{H}$ با بعد n باشند و $\mathcal{Z}$ مکمل $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشد، طبق تعریف خواهیم داشت:

$$\mathcal{H} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Z}$$
$$\mathcal{H} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$$

چون $\dim Z = k \leq n$ بنابراین

$$\mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$$

بنابراین هر زیرفضای $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{H}$ با بعد حداکثر k که در $\mathcal{H}$ چگال باشد، مکمل $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ خواهد بود.

۳.۴ مکمل مشترک در فضای هیلبرت با بعد نامتناهی

در حالت نامتناهی - بعد بودن فضا یعنی $\dim \mathcal{H} = \infty$، شرطهای ذکر شده در تعریف ۱.۲.۴ کافی نیستند و شرط دیگری نیز لازم خواهد بود.

تعریف ۱.۳.۴. در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با بعد نامتناهی شرطهای زیر برای مکمل بودن زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ لازم و کافی می باشند:
آ) $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \{0\}$
ب) $\mathcal{X} + \mathcal{Z}$ در $\mathcal{H}$ چگال است.
ج) اگر $\mathcal{Z}$ مکمل $\mathcal{X}$ باشد، سپس تصویر کج $P_{\mathcal{X}\|\mathcal{Z}}$ عملگری کراندار است.
با این شرط ضروری (ج) که از قضیهٔ نگاشت بسته حاصل شده و ما آنرا بعنوان تعریف پذیرفتیم، در حالت بعد نامتناهی مکمل بودن دو زیرفضا تضمین می شود. اکنون اگر $\mathcal{Z}$ مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشد، ما بدنبال شرطی هستیم که وجود $\mathcal{Z}$ را تضمین کند. برخلاف حالت متناهی - بعد، شرط وجود این مکمل مشترک فراتر از روابط معمول بین بعد و همبعد فضاها خواهد بود، زیرا در اینجا ما با زیرفضاهای با بعد یا همبعد بی نهایت کار می کنیم و نیز ممکن است که زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ بعد و همبعد مساوی داشته باشند، ولی $\mathcal{Y} \subsetneqq \mathcal{X}$ فلذا دارای مکمل مشترک نخواهند بود.
اکنون این مطلب را نشان می دهیم که اگر برای زیرفضای $\mathcal{X}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ چند مکمل وجود داشته باشد، آنگاه همهٔ مکمل های آن دارای یک بعد هستند و لذا بعنوان مکمل متعامد نیز دارای یک بعد هستند.

لم ۲.۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ زیرفضاهای مکمل فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند، آنگاه*

$$codim \mathcal{X} = \dim \mathcal{Z}$$

برهان. کافیست نشان دهیم که یک یکریختی (عملگر کراندار وارونپذیر) بین $\mathcal{X}^\perp$ و $\mathcal{Z}$ وجود دارد. گیریم $\mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} : \mathcal{H} \to \mathcal{X}^\perp$ تصویر متعامد برروی $\mathcal{X}^\perp$ باشد و فرض می کنیم

$$\mathcal{P} := \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp}|\mathcal{Z} : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}^\perp$$

اگر $y \in \mathcal{X}^\perp$ پس $y \in \mathcal{H}$. چون $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Z}$ مکملند، طبق قضیهٔ ۶.۳.۳ خواهیم داشت $y = x + z$ بگونه ای که

$$x = \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} y \in \mathcal{X} \quad , \quad z = y - \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} y \in \mathcal{Z}$$

مطابق با قضیهٔ ۸.۳.۳(ت) $\mathbf{P}_{\mathcal{X}}$ کراندار بوده و بنابراین $C > ۱$ی وجود دارد چنانکه

$$\|z\| = \|y - \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} y\| \le \|y\| + \|\mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} y\| \le C\,\|y\|$$

که نشان می دهد $\mathcal{P}$ کراندار است. برای وارونپذیری $\mathcal{P}$ گیریم

$$z \in \mathcal{Z} \quad , \quad \mathcal{P}z = ۰ \Rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp}|\mathcal{Z}(z) = \mathbf{P}_{\mathcal{X}^\perp} z = ۰ \Rightarrow z \perp \mathcal{X}^\perp \Rightarrow z \in \mathcal{X}$$

و چون $z \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \{۰\}$ یعنی $z = ۰$. بنابراین نگاشت $\mathcal{P}$ یکریختی از $\mathcal{Z}$ برروی $\mathcal{X}^\perp$ است و $\dim \mathcal{X}^\perp = \dim \mathcal{Z}$. □

این لم نشان می دهد که همبعد یک زیرفضا تحت یکریختی (از کل فضا) حفظ می شود. علاوه بر این بین خود فضاهایی که مکمل مشترک دارند نیز یکریختی برقرار است، که در قضیهٔ زیر بیان می گردد. این قضیه در مورد فضاهای باناخ دلخواه نیز برقرار است.

قضیه ۳.۳.۴. *زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای مکمل مشترکند اگر و تنها اگر یک تصویر کراندار $\mathcal{P}$ (نه لزوماً متعامد) برروی یکی از فضاها (مثلاً $\mathcal{Y}$) چنان باشد که عملگر $\mathcal{G} := \mathcal{P}|_{\mathcal{X}}$ که $\mathcal{G} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ یک یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشد.*

برهان. ($\Leftarrow$) اگر $\mathcal{Z}$ مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشد، عملگر تصویر $\mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}} : \mathcal{H} \to \mathcal{Y}$ که کراندار است، را در نظر می گیریم. فرض کنیم

$$\mathcal{G} := \mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}}|\mathcal{X} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

چون $\mathcal{G}$ تحدید $\mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}}$ است، پس $\mathcal{G}$ کراندار است. برای وارونپذیری آن فرض کنیم $x \in \mathcal{X}$ و $\mathcal{G}x = ۰$. چون $x \in \mathcal{H}$، لذا $\exists y \in \mathcal{Y}$ و $\exists z \in \mathcal{Z}$ که $x = y + z$ بنابراین

$$\mathcal{G}x = \mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}}|\mathcal{X}(x) = \mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}} x = \mathbf{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}}(y + z) = y = ۰$$

و از این نتیجه می گیریم $x = z \in \mathcal{Z}$ و $x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \{۰\}$ یعنی $\mathcal{G}$ یکریختی است.

($\Rightarrow$) بالعکس اگر چنین $\mathcal{P}$ی موجود باشد، $\mathcal{Z} := Ker\mathcal{P}$ یک مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است. درواقع تصویر $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}}$ کراندار است و اگر $h \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$، آنگاه

$$\mathcal{P}h = ۰ \quad , \quad h \in \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{Y}\|\mathcal{Z}} h = h \Rightarrow \mathcal{P}h = h \Rightarrow h = ۰$$

بنابراین $\mathcal{Z}$ یک مکمل $\mathcal{Y}$ است.

از طرفی تصویر $\mathcal{P}_{\mathcal{X}\|\mathcal{Z}}$ بروی $\mathcal{X}$ موازی با $\mathcal{Z}$ را می توان بصورت $\mathcal{P}_{\mathcal{X}\|\mathcal{Z}} = \mathcal{G}^{-۱}\mathcal{P}$ تعریف نمود که کراندار می باشد و $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} = \{۰\}$، لذا $\mathcal{Z}$ یک مکمل $\mathcal{X}$ است. □

تعریف ۴.۳.۴. در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ فرض کنیم $\mathcal{Y}$ و $\mathcal{X}$ زیرفضاهای $\mathcal{H}$ و $\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}$ تصویر متعامد برروی $\mathcal{Y}$ باشد. عملگر **گرامی** $\mathbf{G}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ را بصورت $\mathbf{G}=\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}$ تعریف می کنیم.

عملگر گرامی $\mathbf{G}$، دارای خواص بسیاری است که از آنها استفاده خواهیم برد، همچنین $\mathbf{G}$ دارای الحاقی بصورت $\mathbf{G}^*:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ که $\mathbf{G}^*=\mathbf{P}_{\mathcal{X}}|\mathcal{Y}$ است زیرا

$$\langle \mathbf{G}x,y\rangle=\langle \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}(x),y\rangle=\langle \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x,y\rangle=\langle x,\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}y\rangle=\langle \mathbf{P}_{\mathcal{X}}x,y\rangle=\langle x,\mathbf{P}_{\mathcal{X}}y\rangle=\langle x,\mathbf{G}^*y\rangle$$

اکنون برای مکمل مشترک دو زیرفضای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$، حالتی ساده را بررسی می کنیم که $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ از جهاتی کاملاً غیرمتعامدند. در سراسر مباحث $\mathbf{G}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ گرامی تعریف شده در تعریف ۴.۳.۴ خواهد بود.

لم ۵.۳.۴. *اگر $\mathbf{G}$ وارونپذیر باشد، آنگاه $\mathcal{Z}=\mathcal{Y}^{\perp}$ یک مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است.*

برهان. مطابق تعریف گرامی $\mathbf{G}=\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ و طبق فرض وارونپذیر، و نیز تحدید $\mathbf{P}$ است لذا کراندار است. طبق قضیهٔ ۳.۳.۴ چون $\mathbf{G}$ یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است لذا $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترکی بوده و این مکمل مشترک عبارتست از $\mathcal{Z}=Ker\mathbf{G}=Ker\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}=\mathcal{Y}^{\perp}$. □

به فضای هیلبرت برمی گردیم.

لم ۶.۳.۴. *اگر دو زیر فضای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ از یک فضای هیلبرت دارای یک مکمل مشترک باشند، آنگاه بعد فضاهای $\mathcal{X}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ و $\mathcal{Y}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ برابر می‌شوند، یعنی $codim_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})=codim_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$.*

برهان. طبق قضیهٔ ۳.۳.۴ یک تصویر کراندار $\mathcal{P}$ برروی $\mathcal{Y}$ چنان موجود است که عملگر $\mathcal{G}:=\mathcal{P}|_{\mathcal{X}}$ بازاء $\mathcal{G}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ یک یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ تعریف می کند. لذا $\mathcal{G}$ بطور یکریخت $\mathcal{X}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ را برروی $\mathcal{Y}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ می نگارد. □

باید توجه داشت که شرط لم ۶.۳.۴، شرطی«**کافی**» برای وجود مکمل مشترک بیان می کند، یعنی وجود مکمل مشترک برای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ نتیجه می دهد که

$$codim_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}):=\dim(\mathcal{X}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}))=\dim(\mathcal{Y}\ominus(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}))=:codim_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$$

متذکر می شویم که برای بدست آوردن شرط کلی تر، شرط دیگری نیز«**لازم**» است و با این شرط«**کافی**» ذکر شده، شرایط برای بررسی شرط کلی در وجود مکمل مشترک فراهم می شود. از برخی جهات فلسفی، شرط بالا لازم و کافی است، البته چنانکه اشتراک $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ را با «ε-اشتراک» جایگزین کنیم. این نگاه جدید به مسئله را در فصل بعد بررسی خواهیم نمود. حال برای رسیدن به شرط«**لازم**» فوق الذکر، مقدماتی را ذکر می کنیم.

لم ۷.۳.۴. *اگر $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای یک مکمل مشترک در بستار $\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ باشند، آنگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای یک مکمل مشترک در $\mathcal{H}$ هستند.*

برهان. اگر $\mathcal{Z}$ مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ در بستار $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ باشد، یعنی $\mathcal{X} + \mathcal{Z} = Clos(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$ و $\mathcal{Y} + \mathcal{Z} = Clos(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$ آنگاه $\mathcal{Z} \oplus (\mathcal{X} + \mathcal{Y})^\perp$ یک مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ در $\mathcal{H}$ است. زیرا

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\supseteq \mathcal{X} \oplus (\mathcal{Z} \oplus (\mathcal{X} + \mathcal{Y})^\perp) \\ &= (\mathcal{X} + \mathcal{Z}) \oplus (\mathcal{X} + \mathcal{Y})^\perp \\ &= Clos_{\mathcal{H}}(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) \oplus (\mathcal{X} + \mathcal{Y})^\perp \\ &\supseteq (\mathcal{X} + \mathcal{Y}) \oplus (\mathcal{X} + \mathcal{Y})^\perp = \mathcal{H} \end{aligned}$$

بهمین طریق داریم $\mathcal{Y} \oplus (\mathcal{Z} \oplus (\mathcal{X} + \mathcal{Y})^\perp) = \mathcal{H}$. □

ملاحظه ۸.۳.۴. *بنا بر لم فوق بدون کاستن از کلّیت مطالب، همیشه می توانیم فرض کنیم که*

$$Clos(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \mathcal{H}$$

اکنون با استفاده از مطالبی که راجع به نرم معادل روی فضا در بخش ۳,۱ گفته شد، قضیهٔ مهم دیگری را بیان می کنیم. نکته ای که در اینجا ذکر آن اهمیت دارد این است که اگر $\mathbf{G}$ گرامی تعریف شدهٔ در ۴.۳.۴ باشد، سپس نرم تولید شده روی $\mathcal{H}$ متناظر با نرم اولیهٔ $\mathcal{X} + \mathcal{Y} \subset \mathcal{H}$ است.

قضیه ۹.۳.۴. *اگر* $\|\mathbf{G}\| < ۱$ *و*

$$\dim(\mathcal{X} \ominus (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})) = \dim(\mathcal{Y} \ominus (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}))$$

آنگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترکند.

برهان. بنابر لم ۷.۳.۴، بدون کاستن از کلیت می توانیم فرض کنیم که $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ در $\mathcal{H}$ چگال است. تساوی بعدها نتیجه می دهد که یکریختی $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ وجود دارد . با ضرب G در یک مقدار کوچک همیشه می توان فرض کرد که $\|G\| < ۱$.

طبق گفته های بخش ۴,۱ نرم های تولید شده توسط عملگرهای $\mathcal{A}_G$ و $\mathcal{A}_{\mathbf{G}}$ معادلند و نیز هر دو نسبت به $\mathcal{A}_\circ$ (بمعنی $\mathcal{A}_G$ با $G = \circ$) معادلند. نرم مطابق با$\mathcal{A}_{\mathbf{G}}$ نرم روی $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ موروثی از $\mathcal{H}$ است. این نرم معادل با نرم تولید شده توسط $\mathcal{A}_\circ$ است، بنابراین زیرفضای $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ بسته است و در نتیجه $\mathcal{H} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$.

بنابراین $\mathcal{A}_G$ نرم معادل روی $\mathcal{H}$ را بدست می دهد. توجه کنید که در این نرم مطابق گرامیان $\mathbf{G}$ مساوی G است. از آنجا که $\mathbf{G}$ وارونپذیر است ، لم ۳.۳.۴ نتیجه می دهد که $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای یک مکمل مشترکند. □

تعریف ۱۰.۳.۴. زیرفضای $\mathcal{Y}$ از $\mathcal{X}$ را روی عملگر خطی T **پایا** گوئیم (یا گوئیم $\mathcal{Y}$، تحت T پایاست) اگر $T\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}$. همچنین اگر T عملگری خودالحاق باشد،**جزء اساسی** عملگر T^*T را بصورت $T^*T|_{(KerT)^\perp}$ نشان می دهیم.

اگر $\mathbf{G}$ عملگر گرامی باشد، چون $\mathbf{G}^*\mathbf{G} = \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}\ \mathbf{P}_{\mathcal{X}}|\mathcal{Y}$ لذا

$$\circ \leq \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}|\mathcal{X}\ \mathbf{P}_{\mathcal{X}}|\mathcal{Y} \leq I\ \mathbf{P}_{\mathcal{X}} \leq I$$

یعنی $\circ \le \mathbf{G}^*\mathbf{G} \le I$، بهمین صورت $\circ \le \mathbf{G}\mathbf{G}^* \le I$. بعلاوه $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ نرمال است زیرا

$$(\mathbf{G}^*\mathbf{G})(\mathbf{G}^*\mathbf{G})^* = \mathbf{G}^*\mathbf{G}\mathbf{G}^*\mathbf{G} = (\mathbf{G}^*\mathbf{G})^*(\mathbf{G}^*\mathbf{G})$$

بطریق کاملاً مشابه می توان دید که $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ نیز نرمال است. لذا بنابر توضیحات ذیل تعریف ۴.۵.۳ داریم $\sigma_{(\mathbf{G}^*\mathbf{G})} \subseteq [\circ, ۱]$ و $\sigma_{(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)} \subseteq [\circ, ۱]$. (واضح است که طیف جزءاساسی عملگرهای $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ و $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ نیز در $(\circ, ۱]$ واقع می شود). اکنون توجه خود را به قضیهٔ طیفی ۵.۵.۳ معطوف می کنیم. مطابق فرضهای قضیه، چون $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ نرمال است، گیریم $\mathbf{B}$ مجموعهٔ بورل روی $\Omega = [\circ, ۱]$ باشد که شامل $\sigma_{(\mathbf{G}^*\mathbf{G})}$ نیز هست. بنابراین طبق قضیهٔ طیفی، اندازهٔ طیفی یکتای $\mathcal{E}(\cdot)$ روی $\mathbf{B}$ وجود دارد چنانکه

$$\mathbf{G}^*\mathbf{G} = \int_\circ^۱ \lambda d\mathcal{E}(\lambda) \qquad (۱)$$

اینکه ماهیت انتگرالی (۱) چیست مطلبی است که مورد بحث ما در اینجا نمی باشد، بلکه وجود این اندازهٔ طیفی برای ما اهمیت دارد. بنابراین برای عملگرهای طیفی $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ و $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ بترتیب اندازه‌های طیفی $\mathcal{E}(.)$ و $\mathcal{E}^*(.)$ روی $\Omega = [\circ, ۱]$ چنان وجود دارند که $\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}^*(\Omega) = I$ و علاوه براین $\mathcal{E}(.)$ و $\mathcal{E}^*(.)$ عملگرهای تصویری هستند.

حال آماده‌ایم تا برای وجود مکمل مشترک، شرطی را بیان کنیم که کفایت وجود مکمل مشترک در فضا خواهد بود. این شرط مهم که ارتباط بین بعدها و همبعدهاست، را با بیان دو قضیه بصورت شرط لازم و کافی در ذیل عنوان خواهیم کرد.

قسمت عمدهٔ کار ما روی دو موضوع زیر قرار دارد:

- عملگر $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ یا حتی فقط جزء اساسی آن یعنی $\mathbf{G}^*\mathbf{G}|_{(Ker\mathbf{G})^\perp}$. در اینجا تفاوت اساسی در بحث وجود نخواهد داشت زیرا از آنجا که برای $x \in Ker\mathbf{G}$ داریم $\mathbf{G}^*\mathbf{G}x = \circ$ لذا تنها صفرهای $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ را حذف نمودیم.

- بعد دو زیرفضای $\mathcal{X}_\circ$ و $\mathcal{Y}_\circ$ که بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\mathcal{X}_\circ = Ker\mathbf{G} = \{x \in \mathcal{X} | x \perp \mathcal{Y}\}$$
$$\mathcal{Y}_\circ = Ker\mathbf{G}^* = \{y \in \mathcal{Y} | y \perp \mathcal{X}\}$$

لذا با این دو محور، ما هندسهٔ یک جفت زیر فضا را چنان بیان می کنیم که بتوان عملگرهای یکانی معادل را روی آنها تعریف نمود. بنابراین قضیهٔ اساسی زیر را داریم.

قضیه ۱۱.۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{E}(.)$ اندازه طیفی عملگر $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ (یا $\mathbf{G}^*\mathbf{G}|_{(Ker\mathbf{G})^\perp}$) باشد. اگر شرط*

$$\dim \mathcal{X}_\circ + \dim \mathcal{E}((\circ, ۱ - \varepsilon))\mathcal{X} = \dim \mathcal{Y}_\circ + \dim \mathcal{E}((\circ, ۱ - \varepsilon))\mathcal{X} \qquad (*)$$

بازای $\varepsilon > \circ$ی بقدرکافی کوچک برقرار باشد، آنگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترکند.

برهان. ابتدا برای ε موجود قرار دهیم $a = ۱ - \varepsilon$، چون

$$(\circ, a) \cup [a, ۱] = \Omega = (\circ, ۱]$$

و $\mathcal{E}(.)$ جمعی شماراست، لذا
$$\mathcal{E}((\circ,a)) + \mathcal{E}([a,\text{۱}]) = I$$
که روی فضای $\mathcal{X}$ نتیجه می دهد
$$\mathcal{E}((\circ,a))\mathcal{X} + \mathcal{E}([a,\text{۱}])\mathcal{X} = \mathcal{X}$$
و چون $\mathcal{E}$ عملگر تصویری است و نیز $\mathcal{E}([a,\text{۱}]) = I - \mathcal{E}((\circ,a))$ با تعریف مجموعه های
$$\mathcal{X}_\text{۱} = \mathcal{E}((\circ,a))\mathcal{X} \quad , \quad \mathcal{X}_\text{۲} = \mathcal{E}([a,\text{۱}])\mathcal{X}$$
داریم $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\text{۱} \oplus \mathcal{X}_\text{۲}$. بهمین طریق اگر $\mathcal{E}_*(.)$ اندازهٔ طیفی عملگر $\mathbf{GG}^*$ (یا $\mathbf{GG}^*|_{(Ker\mathbf{G}^*)^\perp}$) باشد که جمعی شمارا روی Ω است، مجموعهٔ $\mathcal{Y}$ را با تعریف
$$\mathcal{Y}_\text{۱} = \mathcal{E}_*((\circ,a))\mathcal{Y} \quad , \quad \mathcal{Y}_\text{۲} = \mathcal{E}_*([a,\text{۱}])\mathcal{Y}$$
تجزیه نموده و داریم $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_\text{۱} \oplus \mathcal{Y}_\text{۲}$. بنابراین زیر فضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ بصورت مجموع های متعامد $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_\text{۱} \oplus \mathcal{Y}_\text{۲}$ و $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\text{۱} \oplus \mathcal{X}_\text{۲}$ تجزیه شده اند.

حال قضیه را در دو مرحله ثابت می کنیم.

(اول). در ابتدا برای سادگی مطلب فرض می کنیم که هسته های $Ker\mathbf{G}$ و $Ker\mathbf{G}^*$ هر دو بدیهی هستند. بنابراین فرض قضیه خودبخود برقرار است و برای هر ε مثبت درست خواهد بود. بعلاوه با این فرض $\mathbf{G}$ و $\mathbf{G}^*$ وارونپذیر خواهند شد و لذا یکریختی می باشند. طبق قضیهٔ تجزیهٔ قطبی، اگر $\mathbf{G} = \mathcal{UR}$ تجزیهٔ قطبی $\mathbf{G}$ باشد که در آن $\mathcal{R} = (\mathbf{G}^*\mathbf{G})^{\frac{1}{2}}$ و $\mathcal{U} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ عملگری یکانی است، بنابراین داریم
$$\mathbf{GG}^* = \mathcal{UR}(\mathcal{UR})^* = \mathcal{UR}^\text{۲}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}(\mathbf{G}^*\mathbf{G})\mathcal{U}^*$$
لذا برای اندازه طیفی طبق لم ۶.۵.۳ خواهیم داشت $\mathcal{E}_* = \mathcal{UEU}^*$. این نتیجه می دهد که
$$\mathcal{E}_*((\circ,a)) = \mathcal{UE}((\circ,a))\mathcal{U}^*$$
و
$$\mathcal{E}_*([a,\text{۱}]) = \mathcal{UE}([a,\text{۱}])\mathcal{U}^*$$
و از اینجا نتیجه می شود
$$\mathcal{Y}_1 = \mathcal{E}_*((0,a))\mathcal{Y} = \mathcal{UE}((0,a))\mathcal{U}^*\mathcal{Y} = \mathcal{UE}((0,a))\mathcal{X} = \mathcal{UX}_1$$
و
$$\mathcal{Y}_\text{۲} = \mathcal{E}_*([a,\text{۱}])\mathcal{Y} = \mathcal{UE}([a,\text{۱}])\mathcal{U}^*\mathcal{Y} = \mathcal{UE}([a,\text{۱}])\mathcal{X} = \mathcal{UX}_\text{۲}$$
در نتیجه $\mathcal{Y}_k = \mathcal{UX}_k$ که $k = \text{۱},\text{۲}$ و از اینجا بدست می آید $\dim \mathcal{X}_k = \dim \mathcal{Y}_k$.

از آنجا که $\mathcal{X}_k$ها، $\mathbf{G}^*\mathbf{G}-$پایا هستند لذا $R-$پایا بوده و $\mathbf{G}\mathcal{X}_k = \mathcal{URX}_k \subset \mathcal{UX}_k = \mathcal{Y}_k$. بطور مشابه $\mathbf{G}^*\mathcal{Y}_k \subset \mathcal{X}_k$.

حال با فرض $\mathcal{H}_k := Clos(\mathcal{X}_k + \mathcal{Y}_k)$ $(k = \text{۱},\text{۲})$ می بایست ثابت کنیم که $\mathcal{H}_\text{۱} \perp \mathcal{H}_\text{۲}$. کافیست نشان دهیم که $\mathcal{X}_\text{۱} \perp \mathcal{Y}_\text{۲}$ و $\mathcal{X}_\text{۲} \perp \mathcal{Y}_\text{۱}$. ابتدا $\mathcal{X}_\text{۱} \perp \mathcal{Y}_\text{۲}$ است زیرا اگر $x \in \mathcal{X}_\text{۱}$ و $y \in \mathcal{Y}_\text{۲}$، می نویسیم
$$\langle x,y\rangle = \langle x,\mathbf{P}_\mathcal{Y}y\rangle = \langle \mathbf{P}_\mathcal{Y}x,y\rangle = \langle \mathbf{G}x,y\rangle = \circ$$

زیرا $\mathbf{G}x \in \mathcal{Y}_1 \perp \mathcal{Y}_2$ است. به همین صورت $\mathcal{Y}_1 \perp \mathcal{X}_2$.
اکنون ثابت می کنیم که زوجهای $\mathcal{X}_k$ و $\mathcal{Y}_k$ $(k = 1, 2)$ دارای مکمل مشترکند. برای $\mathcal{X}_k$ و $\mathcal{Y}_k$، گرامی مطابق عبارتست از تحدید $\mathbf{G}|\mathcal{X}_k$. پس برای $\mathcal{X}_2$ و $\mathcal{Y}_2$ گرامی، وارونپذیر است زیرا $Ker\mathbf{G} = \{0\}$. برای $\mathcal{X}_1$ و $\mathcal{Y}_1$ نیز نرم گرامی کمتر از ۱ است. طبق بالا

$$\dim \mathcal{X}_k = \dim \mathcal{Y}_k$$

از طرفی لم ۵.۳.۴ نشان می دهد که $\mathcal{X}_2$ و $\mathcal{Y}_2$ دارای مکمل مشترک و همچنین قضیهٔ ۹.۳.۴ وجود مکمل مشترک را برای زوج $\mathcal{X}_1$ و $\mathcal{Y}_1$ بیان می کند.
(دوم). حالت عمومی تر را بررسی می نمائیم که در آن هسته‌های $Ker\mathbf{G}$ یا $Ker\mathbf{G}^*$ غیربدیهی‌اند. دراین حالت $\mathcal{X}_k$ و $\mathcal{Y}_k$ را مانند بالا در نظر می گیریم و سپس به $\mathcal{X}_1$ و $\mathcal{Y}_1$ بترتیب زیرفضاهای متعامد $Ker\mathbf{G}$ و $Ker\mathbf{G}^*$ را اضافه می‌کنیم، در نتیجه شرط تعامد همچنان پابرجا باقی می ماند ولی زیرفضاهای $\mathcal{X}_2$ و $\mathcal{Y}_2$ را تغییر نمی دهیم فلذا دارای مکمل مشترک خواهند بود. همچنین برای $\mathcal{X}_1$ و $\mathcal{Y}_1$ نرم مطابق گرامی، کمتر از ۱ باقی خواهد ماند (زیرا با اضافه نمودن دو زیرفضای متعامد به هر کدام از زیرفضاها، ما دقیقا قطعات صفر را به دامنهٔ گرامی «قدیمی» اضافه کردیم، یعنی نرم کمتر از ۱ باقی می ماند).
حال با توجه به فرض $(*)$ از صورت قضیه، بعدهای $\mathcal{X}_1$ و $\mathcal{Y}_1$ «جدید» منطبقند، بالاخره قضیهٔ ۹.۳.۴ برای وجود یک مکمل مشترک برای زوجهای مفروض بکار می رود. پاراگراف بالا را رسماً می نویسیم. گیریم

$$\mathcal{X}^\circ := \mathcal{X} \ominus Ker\mathbf{G}$$
$$\mathcal{Y}^\circ := \mathcal{Y} \ominus Ker\mathbf{G}^*$$

و فرض کنید که $\mathbf{G}_\circ : \mathcal{X}^\circ \to \mathcal{Y}^\circ$ تحدید $\mathbf{G}$ باشد. اگر $\mathcal{X}_k^\circ$ و $\mathcal{Y}_k^\circ$ و $\mathcal{H}_k^\circ$ زیرفضاهای مطابق با $\mathbf{G}_\circ$ بوده و عملگرهای $\mathcal{E}^\circ$ و $\mathcal{E}_*^\circ$ بترتیب اندازه های طیفی برای $\mathbf{G}_\circ$ و $\mathbf{G}_\circ^*$ باشند. بوضوح $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_2^\circ$ و $\mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_2^\circ$ و $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_1^\circ \oplus Ker\mathbf{G}$ و $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_1^\circ \oplus Ker\mathbf{G}^*$. از آنجا که

$$Ker\mathbf{G} \perp \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}^\circ$$
$$Ker\mathbf{G}^* \perp \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}^\circ$$

زیر فضاهای $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ متعامدند. چون $\mathcal{X}_2^\circ$ و $\mathcal{Y}_2^\circ$ بر $\mathcal{X}_2$ و $\mathcal{Y}_2$ منطبقند، طبق قسمت (اول) دارای مکمل مشترک هستند. مطابق بحث در حالت هسته های بدیهی داریم:

$$\dim \mathcal{X}_1^\circ = \dim \mathcal{Y}_1^\circ = \dim \mathcal{E}^\circ((0, a))\mathcal{X}^\circ = \dim \mathcal{E}((0, a))\mathcal{X}$$

مطابق فرض قضیه خواهیم داشت

$$\dim \mathcal{X}_1 = \dim \mathcal{X}_1^\circ + \dim Ker\mathbf{G} = \dim \mathcal{Y}_1^\circ + \dim Ker\mathbf{G}^* = \dim \mathcal{Y}_1$$

حال توجه کنید که

$$\|\mathbf{G}|X_1\| = \|\mathbf{G}_\circ|X_1^\circ\| < 1$$

زیرا عملگرها تنها در قطعات صفر متفاوتند. لذا قضیهٔ ۹.۳.۴ نتیجه می دهد که $\mathcal{X}_1$ و $\mathcal{Y}_1$ دارای یک مکمل مشترکند. □

در ذیل عکس قضیه را بررسی خواهیم کرد ولی قبل از آن به یک لم نیاز داریم.

لم ۱۲.۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ زیرفضاهای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند. اگر یکریختی $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ چنان موجود باشد که $\|x - Ax\| \leq q \|x\|$ بازای یک $q < ۱$ و $\forall x \in \mathcal{X}$، آنگاه*

$$codim\mathcal{X} = codim\mathcal{Y}$$

برهان. عملگر $A_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ را بصورت $A_{\mathcal{X}}x := \mathbf{P}_{\mathcal{X}}Ax$ تعریف می کنیم که $\mathbf{P}_{\mathcal{X}}$ تصویر متعامد برروی $\mathcal{X}$ است. چون $\mathbf{P}_{\mathcal{X}}$ و A کراندارند پس $A_{\mathcal{X}}$ کراندار است. برای وارونپذیری $A_{\mathcal{X}}$ از آنجا که

$$\|A_{\mathcal{X}}x - x\| = \|\mathbf{P}_{\mathcal{X}}Ax - \mathbf{P}_{\mathcal{X}}x\| = \|\mathbf{P}_{\mathcal{X}}(Ax - x)\| \leq \|Ax - x\| \leq q \|x\|$$

بنابراین $\|A_{\mathcal{X}} - I\| \leq q < ۱$ لذا طبق لم ۴.۲.۳، $A_{\mathcal{X}}$ وارونپذیر است. برای $y \in \mathcal{Y}$ داریم $\mathbf{P}_{\mathcal{X}}y = A_{\mathcal{X}}A^{-۱}y$. بنابراین $\mathbf{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ یک یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ تعریف می کند. مطابق لم ۵.۳.۴، $\mathcal{X}^{\perp}$ یک مکمل مشترک برای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است. از آنجا لم ۲.۳.۴ نتیجه می دهد $codim\mathcal{X} = codim\mathcal{Y} = \dim \mathcal{X}^{\perp}$. □

قضیه ۱۳.۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ زیرفضاهای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای مکمل مشترکند و $\mathcal{E}(\cdot)$ اندازهٔ طیفی عملگر $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ (یا $\mathbf{G}^*\mathbf{G}|_{(Ker\mathbf{G})^{\perp}}$) باشد. آنگاه بازای εی بقدرکافی کوچک داریم:*

$$\dim \mathcal{X}_{۰} + \dim \mathcal{E}((۰, ۱ - \varepsilon))\mathcal{X} = \dim \mathcal{Y}_{۰} + \dim \mathcal{E}((۰, ۱ - \varepsilon))\mathcal{X} \quad (*)$$

برهان. از آنجا که $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترکند، بنابراین طبق قضیهٔ ۳.۳.۴ یک تصویر کراندار $\mathcal{P}$ برروی $\mathcal{Y}$ چنان وجود دارد که $\mathcal{G} := \mathcal{P}|\mathcal{X}$ یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است. اکنون ثابت می کنیم که در شرط $(*)$ چنین εی وجود دارد.

مانند نمادگذاری بخش قبلی، شرط $(*)$ را چنین می‌نویسیم:

$$codim_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_{۲} := \dim(\mathcal{X} \ominus \mathcal{X}_{۲}) = \dim(\mathcal{Y} \ominus \mathcal{Y}_{۲}) =: codim_{\mathcal{Y}}\mathcal{Y}_{۲}$$

که $codim_{\mathcal{X}}$ برای همبعد در $\mathcal{X}$ بیان می شود. چون $\mathcal{G}$ یکریختی بین $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ است، پس

$$codim_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_{۲} = codim_{\mathcal{Y}}\mathcal{G}\mathcal{X}_{۲}$$

نشان می دهیم که زیرفضاهای $\mathcal{G}\mathcal{X}_{۲} = \mathcal{P}\mathcal{X}_{۲}$ و $\mathcal{Y}_{۲} = \mathbf{G}\mathcal{X}_{۲} = \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}\mathcal{X}_{۲}$ همبعدهای یکسانی در $\mathcal{Y}$ دارند. تعریف می کنیم $A : \mathbf{P}_{\mathcal{Y}}\mathcal{X}_{۲} \to \mathcal{P}\mathcal{X}_{۲}$ که $A = \mathcal{P}(\mathbf{G}|\mathcal{X}_{۲})^{-۱}$ و چون $\mathbf{G}$ بطریقی طولپا $\mathcal{X}_{۲}$ را به $\mathcal{Y}_{۲}$ می نگارد، پس A خوشتعریف بوده و اگر $x \in \mathcal{X}_{۲}$ سپس $\|\mathbf{G}x\|^{۲} \geq a\|x\|^{۲}$ که در آن $a = ۱ - \varepsilon$. می نویسیم

$$\|x\|^{۲} - \|\mathbf{G}x\|^{۲} \leq (۱ - a)\|x\|^{۲} \leq \frac{۱-a}{a}\|\mathbf{G}x\|^{۲} = \frac{\varepsilon}{۱-\varepsilon}\|\mathbf{G}x\|^{۲}$$

پس

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x-\mathcal{P}x\|^{۲} &= \|\mathcal{P}\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x-\mathcal{P}x\|^{۲} \\ &= \|\mathcal{P}(\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x-x)\|^{۲} \\ &\leq \|\mathcal{P}\|^{۲}\|\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x-x\|^{۲} \\ &= \|\mathcal{P}\|^{۲}(\|x\|^{۲}-\|\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}x\|^{۲}) \end{aligned}$$

که قسمت آخر از قضیهٔ ۸.۳.۳ (ث) نتیجه شده و در ادامه داریم

$$\|\mathbf{G}x-\mathcal{P}x\|^{۲}=\|\mathcal{P}\|^{۲}(\|x\|^{۲}-\|\mathbf{G}x\|^{۲})\leq\frac{\varepsilon}{۱-\varepsilon}\|\mathcal{P}\|^{۲}\|\mathbf{G}x\|^{۲}$$

برای برقراری فرض لم ۱۲.۳.۴ کافیست بگیریم

$$q=\frac{\varepsilon}{۱-\varepsilon}\|\mathcal{P}\|^{۲}<۱$$

که با در نظر گرفتن $\varepsilon<\frac{۱}{۱+\|\mathcal{P}\|^{۲}}$ بازای $\varepsilon>\circ$ی کوچکی فرض لم ۱۲.۳.۴ برای زیرفضاهای $\mathbf{P}_{\mathcal{Y}}\mathcal{X}_{۲}$ و $\mathcal{P}\mathcal{X}_{۲}$ در $\mathcal{Y}$ برقرار است، یعنی $codim_{\mathcal{X}}\mathcal{X}_{۲}=codim_{\mathcal{Y}}\mathcal{G}\mathcal{X}_{۲}$. □

اکنون حالت کلی قضایای ۱۱.۳.۴ و ۱۳.۳.۴ را که برای فضاهای هیلبرت حقیقی و مختلط برقرار است بصورت زیر بیان می کنیم.

قضیه ۱۴.۳.۴. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ زیرفضاهای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $\mathbf{G}$ گرامی روی $\mathcal{H}$ بوده و $\mathcal{E}(.)$ اندازه طیفی عملگر $\mathbf{G}^{*}\mathbf{G}$ (یا $\mathbf{G}^{*}\mathbf{G}|_{(Ker\mathbf{G})^{\perp}}$) باشد.آنگاه $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای یک مکمل مشترکند اگر و فقط اگر*

$$\dim\mathcal{X}_{\circ}+\dim\mathcal{E}((\circ,۱-\varepsilon))\mathcal{X}=\dim\mathcal{Y}_{\circ}+\dim\mathcal{E}((\circ,۱-\varepsilon))\mathcal{X}\quad(*)$$

بازای $\varepsilon>\circ$ی بقدر کافی کوچکی برقرار باشد.

ملاحظه ۱۵.۳.۴. *آنچه درکنار این قضیه میتوان گفت اینست که همیشه میتوان مقدار $\mathcal{E}((\circ,۱-\varepsilon))$ را با $\mathcal{E}((\circ,۱-\varepsilon])$ جایگزین نمود، زیرا همانگونه که در اثبات قضیهٔ ۱۱.۳.۴ دیدیم، بجای افراز $\{(\circ,a),[a,۱]\}$ می توان از افراز $\{(\circ,a],(a,۱]\}$ بهره برد. بعلاوه اگر $\dim\mathcal{X}_{\circ}=\dim\mathcal{Y}_{\circ}$ باشد، آنگاه مکمل مشترک همیشه وجود خواهد داشت زیرا شرط $(*)$ خودبخود برقرار خواهد بود. از آنجا که $(*)$ برای وجود مکمل مشترک دو زیرفضا شرطی لازم و کافی است، لذا با بررسی این شرط می توان وجود مکمل مشترک یا عدم وجود آنرا بررسی نمود.*

نکتهٔ دیگری که بیان آن خالی از لطف نیست این است که از آنجا که تعریف ضرب داخلی روی فضا مفهومی توپولوژیکی را القا می کند، لذا این مفهوم در مورد مکمل مشترک نیز صادق است. بدین معنی که اگر نرم (ضرب داخلی) در فضا را با نرم معادل (ضرب داخلی) جایگزین کنیم، تغییری در مفهوم مکمل مشترک حاصل نمی شود و این برداشتی از مطالب بخش ۴٫۱ است.

عکس نقیض قضیه در حالتی که فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ تفکیک پذیر باشد، کاربردی بوده و در لم زیر آنرا بیان می کنیم.

لم ۱۶.۳.۴. *اگر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ تفکیک پذیر باشد، زیرفضای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای مکمل مشترک نیستند اگر و تنها اگر $\dim \mathcal{X}_\circ \neq \dim \mathcal{Y}_\circ$ و عملگر $(I - \mathbf{G}^*\mathbf{G})|_{(Ker\mathbf{G})^\perp}$ فشرده باشد.*

برهان. در واقع برای فضای $\mathcal{H}$ تفکیک پذیر، اگر مکمل مشترک $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ موجود نباشد، یعنی برای هر $\varepsilon > \circ$ شرط $(*)$ قضیهٔ ۱۴.۳.۴ برقرار نبوده و این در حالتی درست است که $\dim \mathcal{X}_\circ \neq \dim \mathcal{Y}_\circ$ و $\dim \mathcal{E}((\circ, ۱ - \varepsilon])\mathcal{X}$ برای هر $\varepsilon > \circ$ متناهی باشد. عبارت دوم دقیقاً به این معناست که

$$(I - \mathbf{G}^*\mathbf{G})|_{(Ker\mathbf{G})^\perp}$$

عملگری فشرده باشد. □

این لم تنها حالت ممکن برای وجود نداشتن مکمل مشترک را بازگو کرده و بما امکان می دهد تا مثالهای غیر بدیهی از زیرفضاهای بدون مکمل مشترک را ارائه دهیم.

حال مثالی را عنوان می کنیم که در شرط لازم $codim_{\mathcal{X}}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = codim_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$ برای زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ صدق کند و نیز $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دارای بعد و همبعد مساوی باشند، لیکن مکمل مشترکی نداشته باشند.

۴.۴ مثال غیربدیهی از فضاهای بدون مکمل مشترک

فرض کنید $\mathcal{H} = \ell^۲$ فضای دنباله های مربع جمعپذیر بوده و گیریم $\{e_k\}_{k=\circ}^{\infty}$ پایهٔ متعامد یکه استاندارد $\mathcal{H}$ باشد. زیرفضاهای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ را بصورت زیر می سازیم. گیریم $y_\circ = e_\circ$ و برای $k \geq ۱$،

$$\begin{aligned} y_k &= \cos \tfrac{۱}{k} e_{۲k-۱} + \sin \tfrac{۱}{k} e_{۲k} \\ x_k &= \cos \tfrac{۱}{k} e_{۲k-۱} - \sin \tfrac{۱}{k} e_{۲k} \end{aligned}$$

اگر $\mathcal{X} = Span\{x_i\}_{i=۱}^{\infty}$ و $\mathcal{Y} = Span\{y_i\}_{i=\circ}^{\infty}$ لذا $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ زیرفضاهای با بعد و همبعد مساویند و $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{\circ\}$ و لذا دارای مکمل مشترک نیستند. در واقع بدیهی است که $\mathbf{G}$ یک اختلال از I است و

$$\circ = \dim Ker\mathbf{G} \neq \dim Ker\mathbf{G}^* = ۱$$

خواهد بود.